Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by Schauder's theorem (Functional Equations in Mathematical Models)

数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 229-236

Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by Schauder's theorem

島根大学・総合理工学部　古用哲夫 (Tetsuo Furumochi)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,
Shimane University

1. Preliminaries

関数微分方程式の解の漸近挙動を、次の不動点定理 ([3; p. 15]) を用いて調べる。

Theorem 1.1 (Schauder's first theorem). Let $(C, \|\cdot\|)$ be a normed space, and let S be a compact convex nonempty subset of C. Then every continuous mapping of S into S has a fixed point.

$r_0 \geq 0$ を固定した定数とし、関数 $h : [-r_0, \infty) \to [1, \infty)$ は、$h(-r_0) = 1$, $h(t) \to \infty$ as $t \to \infty$ を満たす連続増加関数とする。任意の $t_0 \in R^+ := [0, \infty)$ に対して、$(C_{t_0}, \|\cdot\|_h)$ を

$$\|\phi\|_h := \sup \left\{ \frac{|\phi(t)|}{h(t-t_0)} : t \geq t_0 - r_0 \right\} < \infty$$

なる連続関数 $\phi : [t_0 - r_0, \infty) \to R := (-\infty, \infty)$ からなるバナハ空間とする。ここで、$|\cdot|$ は絶対値記号を表す。

まず一つの補題を準備する。

Lemma. If the set $\{\phi_k(t)\}$ of real-valued functions on $[t_0 - r_0, \infty)$ is uniformly bounded and equicontinuous, then the sequence $\{\phi_k(t)\}$ contains a subsequence $\{\phi_{k_l}(t)\}$ such that $\|\phi_{k_l} - \phi\|_h \to 0$ as $l \to \infty$, where $\phi(t)$ is a bounded and continuous function.

2. Asymptotic behavior of solutions

次のスカラー半線形方程式を考える。

$$x'(t) = -a(t)x(t) - b(t)g\big(x(t - r(t))\big), \quad t \in R^+. \tag{2.1}$$

ここで、関数 a, b, $r : R^+ \to R := (-\infty, \infty)$, $g : R \to R$ は連続とする。任意にとって固定した定数 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $r_0 \geq 0$ に対して次を仮定

$$(2.2)\qquad |g(x)| \le \beta|x| \ \text{for}\ |\mathrm{x}| \le \alpha,$$

$$(2.3)\qquad \sup\left\{e^{\int_\tau^t (a(s)-\beta\gamma|b(s)|)ds} : t \in R^+\right\} \le \gamma,$$

ここで、$\tau = \tau(t) := \max(0, \mathrm{t}-\mathrm{r(t)})$ である。任意の $t_0 \in R^+$ に対して

$$(2.4)\qquad \sigma = \sigma(t_0) := \sup\left\{ \int_{t_0}^t (\beta\gamma|b(s)| - a(s))ds : t \in R^+\right\} < \infty,$$

$$(2.5)\qquad r(t) \ge 0 \ \text{and}\ \mathrm{t}-\mathrm{r(t)} \ge -\mathrm{r}_0,\ \ \mathrm{t} \in \mathrm{R}^+$$

とする。数 $\eta = \eta(t_0)$ を次のように定義する。

$$(2.6)\qquad \eta := \alpha e^{-\sigma}.$$

方程式 (2.1) に対して、次のスカラー線形方程式を考える。

$$(2.7)\qquad q' = (\beta\gamma|b(t)| - a(t))q,\ \ t \in R^+.$$

関数 $q : [t_0 - r_0, \infty) \to R^+$ を、区間 $[t_0 - r_0, t_0]$ 上では $q(t) \equiv \delta$、区間 $[t_0, \infty)$ 上では初期値問題

$$q' = (\beta\gamma|b(t)| - a(t))q,\ \ q(t_0) = \eta,\ \ t \ge t_0$$

の一意解として定義する。このとき、$q(t)$ は次のように表される。

$$(2.8)\qquad \begin{cases} q(t) = \eta e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} + \beta\gamma\displaystyle\int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(u)du}|b(s)|q(s)ds \\[2ex] \quad\ \ = \eta e^{\int_{t_0}^t \left(\beta\gamma|b(s)|-a(s)\right)ds},\ \ t \ge t_0. \end{cases}$$

これと (2.4)、(2.6) から次が得られる。

$$(2.9)\qquad 0 < q(t) \le \eta e^\sigma = \alpha,\ \ t \ge t_0.$$

方程式 (2.1) の零解の安定性に関して、次の定理が成り立つ。

Theorem 2.1. Suppose that solutions of (2.1) are uniquely determined by continuous initial functions, and that (2.2)-(2.5) hold. Then we have:

(i) The zero solution of (2.1) is stable.

(ii) If $\sigma^* := \sup\{\sigma(t) : t \in R^+\} < \infty$, then the zero solution of (2.1) is uniformly stable.

(iii) If we have

$$\int_0^t (a(s) - \beta\gamma|b(s)|)ds \to \infty \text{ as } t \to \infty, \tag{2.10}$$

then the zero solution of (2.1) is asymptotically stable.

(iv) In addition to $\sigma^* < \infty$, if we have

$$\int_{t_0}^t (a(s) - \beta\gamma|b(s)|)ds \to \infty \text{ uniformly for } t_0 \in \mathrm{R}^+ \text{ as } t \to \infty, \tag{2.11}$$

then the zero solution of (2.1) is uniformly asymptotically stable.

証明 (i) 方程式 (2.7) の零解は安定だから、任意の $\epsilon \in (0, \alpha]$ と $t_0 \in R^+$ に対して $\delta = \delta(\epsilon, t_0) \in (0, \eta]$ が存在して、$|q_0| \le \delta$ なる任意の q_0 に対して

$$|q(t, t_0, q_0)| < \epsilon \text{ for all } t \ge t_0$$

が成立する。この t_0 に対して、$(C_{t_0}, \|\cdot\|_h)$ を連続関数 $\phi : [t_0 - r_0, \infty) \to R$ からなるバナハ空間とする。$\sup\{|\psi(\theta)| : -r_0 \le \theta \le 0\} \le \delta$ なる連続関数 $\psi : [-r_0, 0] \to R$ に対して、S を次の 3 条件を満たす連続関数 $\phi : [t_0 - r_0, \infty) \to R$ からなる集合とする。

$$\phi(t) = \psi(t - t_0) \text{ for } t_0 - r_0 \le t \le t_0,$$

$$|\phi(t)| \le q(t) \text{ for } t \ge t_0,$$

$$|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \le L|t_1 - t_2| \text{ for } t_1,\ t_2 \in R^+ \text{ with } t_0 \le \tau_1 \le t_1,\ t_2 \le \tau_2.$$

ここで、$q(t)$ は $\eta = \delta(\epsilon, t_0)$ に対して (2.8) で定義され、$L = L(\tau_1, \tau_2)$ は次を満たす関数である。

$$(|a(t)| + \beta\gamma|b(t)|)\alpha \le L \text{ for } \tau_1 \le t \le \tau_2. \tag{2.12}$$

関数 $q(t)$ は (2.9) を満たしているから、次が成り立つ。

$$|q'(t)| \le (|a(t)| + \beta\gamma|b(t)|)\alpha,\ t \ge t_0.$$

$$\xi(t) := \begin{cases} \psi(t-t_0), & t_0 - r_0 \le t \le t_0 \\ \frac{\psi(0)q(t)}{\eta}, & t \ge t_0 \end{cases}$$

で定義される関数 $\xi(t)$ は S の元であり、Lemma から S は C_{t_0} の空でないコンパクト凸部分集合である。集合 S 上の写像 P を、$\phi \in S$ に対して

$$(P\phi)(t) := \begin{cases} \psi(t-t_0), & t_0 - r_0 \le t \le t_0 \\ \psi(0)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(u)du} b(s)g\big(\phi(s-r(s))\big)ds, & t \ge t_0 \end{cases}$$

によって定義する。このとき、

$$(P\phi)(t) = \psi(t-t_0) \text{ for } t_0 - r_0 \le t \le t_0$$

であり、(2.2) と (2.8) から

$$|(P\phi)(t)| \le \delta e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} + \beta \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(u)du} |b(s)| q\big(s-r(s)\big)ds$$

$$\le \delta e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} + \beta\gamma \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(u)du} |b(s)| q(s)ds = q(t), \ \ t \ge t_0$$

を得る。更に、

$$(P\phi)'(t) = -a(t)(P\phi)(t) + b(t)g\big(\phi(t-r(t))\big), \ \ t > t_0$$

であり、これから

$$|(P\phi)'(t)| \le |a(t)|q(t) + \beta|b(t)|q\big(t-r(t)\big)$$

$$\le (|a(t)| + \beta\gamma|b(t)|)q(t) \le (|a(t)| + \beta\gamma|b(t)|)\alpha, \ \ t > t_0$$

が得られ、P は S を S に写す。明らかに P は連続である。従って、Theorem 1.1 により P は S に不動点 ϕ をもち、それは (2.1) の解 $x(t,t_0,\psi)$ で

$$|x(t,t_0,\psi)| \le q(t) = q(t,t_0,\delta) < \epsilon, \ \ t \ge t_0$$

を満たすから、(2.1) の零解は安定である。

(ii) もし $\sigma^* < \infty$ であれば、(2.7) の零解は一様安定である。方程式 (2.1) の零解の一様安定性の証明は、(i) の証明と同様であるので詳細は省略する。

(iii)　仮定 (2.10) から $t \to \infty$ のとき $q(t) \to 0$ だから、(2.7) の零解は漸近安定である。方程式 (2.1) の零解の漸近安定性の証明は、(i) の証明と同様であるので詳細は省略する。

(iv)　仮定 $\sigma^* < \infty$ と (2.11) から、(2.7) の零解は一様漸近安定である。方程式 (2.1) の零解の一様漸近安定性の証明は、(i) の証明と同様であるので詳細は省略する。

方程式 (2.1) の解の有界性について調べるために、(2.2) の代わりに

$$(2.2^*) \qquad |g(x)| \leq \beta|x| \ \text{for} \ x \in R$$

を仮定する。このとき、(2.1) の解の有界性に関して次の定理が成り立つ。

Theorem 2.2. Suppose that solutions of (2.1) are uniquely determined by continuous initial functions, and that (2.2*) and (2.3)-(2.5) hold. Then we have:

(i) Solutions of (2.1) are equi-bounded.

(ii) If $\sigma^* < \infty$, then solutions of (2.1) are uniformly bounded.

(iii) If we have (2.10), then solutions of (2.1) are equi-ultimately bounded.

(iv) If we have $\sigma^* < \infty$ and (2.11), then solutions of (2.1) are uniformly ultimately bounded.

証明 (i) 方程式 (2.7) の解は同等有界だから、任意の $\alpha > 0$ と $t_0 \in R^+$ に対して $B = B(\alpha, t_0) > 0$ が存在して、$|q_0| \leq \alpha$ なる任意の q_0 に対して

$$|q(t, t_0, q_0)| < B \ \text{for all} \ t \geq t_0$$

が成立する。この t_0 に対して、$(C_{t_0}, \|\cdot\|_h)$ を Theorem 2.1(i) の証明におけるものと同じバナハ空間とする。$\sup\{|\psi(\theta)| : -r_0 \leq \theta \leq 0\} \leq \alpha$ なる連続関数 $\psi : [-r_0, 0] \to R$ に対して、S を次の 3 条件を満たす連続関数 $\phi : [t_0 - r_0, \infty) \to R$ からなる集合とする。

$$\phi(t) = \psi(t - t_0) \ \text{for} \ t_0 - r_0 \leq t \leq t_0,$$

$$|\phi(t)| \leq q(t) \ \text{for} \ t \geq t_0,$$

$$|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \leq L|t_1 - t_2| \ \text{for} \ t_1,\ t_2 \ \text{with} \ t_0 \leq \tau_1 < t_1,\ t_2 \leq \tau_2.$$

ここで、$q(t)$ は $\eta = \alpha$ に対して (2.8) で定義され、$L = L(\tau_1, \tau_2)$ は $\alpha = B$ に対して (2.12) で与えられる関数である。このとき $q(t)$ は

$$0 < q(t) < B, \ t \geq t_0$$

を満たす。Theorem 2.1(i) の証明で見たように、S は C_{t_0} の空でないコンパクト凸部分集合である。写像 P を Theorem2.1(i) の証明にあるように定義すると、P が S を S に写す連続写像であることが容易に分かる。従って、Theorem 1.1 により、P は不動点 ϕ をもち、それは (2.1) の解 $x(t, t_0, \psi)$ で

$$|x(t, t_0, \psi)| \leq q(t) = q(t, t_0, \alpha) < B, \ t \geq t_0$$

を満たすから、(2.1) の解は同等有界である。

(ii)-(iv) このとき、(ii)-(iv) における仮定から (2.7) の解はそれぞれ、一様有界、同等終局有界、及び一様終局有界であり、このことから (ii)-(iv) は (i) と同様に証明されるので詳細は省略する。

ここで、例を示す。

Example 2.1. 関数 $a: R^+ \to R$ を

$$a(t) := \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1 \\ 6t-7, & 1 \le t < 2 \\ 5, & 2 \le t < 12 \\ 77-6t, & 12 \le t \le 13 \end{cases}$$

を満たす 13-周期関数とし、$r(t) \equiv r$ $(0 \le r \le (\ln 2)/5)$, $b(t) \equiv B$ $(0 < B \le 55/26)$、及び $\beta = 1$ とする。このとき、$\gamma = 2$ とした (2.3) と $\sigma^* < \infty$ が成り立つことが容易に分かる。従って、Theorem 2.1 と Theorem 2.2 から、(2.1) の零解は一様安定、かつ (2.1) の解は一様有界である。更に、$0 < B < 55/26$ であれば (2.11) が成り立つから、(2.1) の零解は一様漸近安定、かつ (2.1) の解は一様終局有界である。

方程式 (2.1) は、$g(x) \equiv x$ $(x \in R)$ かつ $r(t) \equiv r$ $(t \in R^+)$ であれば

$$x'(t) = -a(t)x(t) - b(t)x(t-r), \quad t \in R^+ \tag{2.13}$$

となる。Hale の著書の中 ([2, p.108]) で、仮定

$$a(t) \ge \delta > 0, \quad |b(t)| \le \theta\delta, \quad \theta < 1 \quad (\delta と \theta は定数) \tag{2.14}$$

の下で、リアプノフ汎関数

$$V(t, x_t) = \frac{1}{2}\left(x^2(t) + \delta\int_{t-r}^{t} x^2(s)ds\right)$$

を用いて、(2.13) の零解の一様漸近安定性が論じられている。

一方、Burton-Furumochi [1] において、仮定

$$\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du}|b(s)|ds \le \eta < 1 \text{ on } R^+, \quad \int_0^t a(s)ds \to \infty \text{ as } t \to \infty \tag{2.15}$$

(但し η は定数) の下で、縮小写像原理を用いて、(2.13) の零解の漸近安定性が論じられている。

しかし、Example 2.1 における関数 $a(t)$ 及び $b(t)$ は (2.14) も (2.15) も満たさない。

次に, スカラー積分微分方程式

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \int_{t-r(t)}^{t} b(t,s)g(x(s))ds, \quad t \in R^+ \tag{2.16}$$

を考える。ここで、a, $r: R^+ \to R$, $b: R^+ \times R \to R$ と $g: R \to R$ は連続である。任意にとって固定した定数 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $r_0 \geq 0$ に対して、(2.2)、(2.5) と次を仮定する。

$$(2.17)\quad \sup\left\{\sup\left\{e^{\int_v^t \left(a(s)-\beta\gamma\int_{s-r(s)}^s |b(s,u)|du\right)ds} \middle| \tau \leq v \leq t\right\} \middle| t \in R^+\right\} \leq \gamma.$$

ここで、$\tau = \tau(t) := \max\left(0, t - r(t)\right)$ である。任意の $t_0 \in R^+$ に対して

$$(2.18)\quad \sigma = \sigma(t_0) := \sup\left\{\int_{t_0}^t \left(\beta\gamma\int_{s-r(s)}^s |b(s,u)|du - a(s)\right)ds \middle| t \in R^+\right\} < \infty$$

とする。この σ に対して、数 $\eta = \eta(t_0)$ を

$$\eta := \alpha e^{-\sigma}$$

によって定義する。

方程式 (2.16) に対して、次のスカラー線形方程式を考える。

$$(2.19)\qquad q' = \left(\beta\gamma\int_{t-r(t)}^t |b(t,s)|ds - a(t)\right)q,\ \ t \in R^+.$$

関数 $q: [t_0 - r_0, \infty) \to R^+$ を、区間 $[t_0 - r_0, t_0]$ 上では $q(t) \equiv 0$、区間 $[t_0, \infty)$ 上では初期値問題

$$q' = \left(\beta\gamma\int_{t-r(t)}^t |b(t,s)|ds - a(t)\right)q,\ \ q(t_0) = \eta,\ \ t \geq t_0$$

の一意解として定義する。このとき $q(t)$ は次のように表され、これと (2.18) から (2.9) が得られる。

$$\begin{aligned} q(t) &= \eta e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} + \beta\gamma\int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(u)du}\int_{s-r(s)}^s |b(s,u)|du\,q(s)ds \\ &= \eta e^{\int_{t_0}^t \left(\beta\gamma\int_{s-r(s)}^s |b(s,u)|du - a(s)\right)ds},\ \ t \geq t_0. \end{aligned}$$

方程式 (2.16) の解の安定性と有界性に関して次の 2 定理が成り立つ。証明はそれぞれ Theorem 2.1 及び Theorem 2.2 の証明と同様であるので省略する。

Theorem 2.3. Suppose that solutions of (2.1) are uniquely determined by continuous initial functions, and that (2.2), (2.5), (2.17) and (2.18) hold. Then we have:

(i) The zero solution of (2.16) is stable.

(ii) If $\sigma^* := \sup\{\sigma(t) : t \in R^+\} < \infty$, then the zero solution of (2.16) is uniformly stable.

(iii) If we have

$$(2.20)\qquad \int_0^t \left(a(s) - \beta\gamma\int_{s-r(s)}^s |b(s,u)|du\right)ds \to \infty \text{ as } t \to \infty,$$

then the zero solution of (2.16) is asymptotically stable.

(iv) In addition to $\sigma^* < \infty$, if we have

$$\text{(2.21)} \qquad \begin{cases} \int_{t_0}^{t} \left(a(s) - \beta\gamma \int_{s-r(s)}^{s} |b(s,u)|du\right) ds \to \infty \\ \\ \text{uniformly for } t_0 \in \mathrm{R}^+ \text{ as } t \to \infty, \end{cases}$$

then the zero solution of (2.16) is uniformly asymptotically stable.

Theorem 2.4. Supose that solutions of (2.1) are uniquely determined by continuous initial functions, and that (2.2*), (2.5), (2.17) and (2.18) hold. Then we have:

(i) Solutions of (2.16) are equi-bounded.

(ii) If $\sigma^* < \infty$, then solutions of (2.16) are uniformly bounded.

(iii) If we have (2.20), then solutions of (2.16) are equi-ultimately bounded.

(iv) If we have $\sigma^* < \infty$ and (2.21), then solutions of (2.16) are uniformly ultimately bounded.

最後に、もう１つの例を示す。

Example 2.2. 関数 $a : R^+ \to R$ を Example 2.1 と同じものとし、$r(t) \equiv r$ $(0 < r \leq 2/3)$, $b(t,s) \equiv B$ $(0 < B \leq 55/26r)$、及び $\beta = 1$ とする。このとき、$\gamma = 2$ とした (2.17) と $\sigma^* < \infty$ が成り立つことが容易に分かる。従って、Theorem 2.3 と Theorem 2.4 から、(2.16) の零解は一様安定、かつ (2.16) の解は一様有界である。更に、$0 < B < 55/26r$ であれば (2.21) が成り立つから、(2.16) の零解は一様漸近安定、かつ (2.16) の解は一様終局有界である。

Burton-Furumochi [1] において、仮定

$$\text{(2.22)} \qquad \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du} \int_{s-r(s)}^{s} |b(s,u)|duds \leq \eta < 1$$

(η は定数) の下で、縮小写像原理を用いて、(2.16) の漸近安定性が論じられている。しかし、Example 2.2 における関数 $a(t)$ 及び $b(t,s)$ は r=2/3 とした (2.22) を満たしていない。

References

[1] Burton, T. A. and T. Furumochi, Fixed points and problems in stability theory for ordinary and functional differential equations, Dynamic Systems and Appl., 10(2001), 89-116.

[2] Hale, J. K., Theory of Functional Differential Equations, Springer, New York, 1977.

[3] Smart, D. R., Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.